یکشنبه
۱۴۰۳/۱۲/۱۹

مباحث پایه
(فصل ۴ دهم + فصل ۱ یازدهم از
صفحه ۱۱ تا انتهای فصل)

دفترچه پاسخ

دوپینگ ماز

گروه آزمایشی علوم تجربی
ریاضی

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضی	حسین شفیع‌زاده محدثه شیخعلی مهرداد کیوان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان ـ محمد پورسعید	فرشاد حسن‌زاده ارسلان حسنوند ـ سجاد احمدی

هفته اول	هفته دوم	هفته سوم	هفته چهارم	هفته پنجم	هفته ششم
مباحث پایه	جامع تابع + توابع نمایی و لگاریتمی	جامع مثلثات	جامع حد و پیوستگی + مشتق و کاربرد مشتق	الگو و دنباله +توان‌های گویا + جامع هندسه	جامع شمارش، بدون شمردن و آمار و احتمال

۵۵ روز جمع‌بندی تا کنکور اردیبهشت

دانش آموزان عزیز ماز

امیدواریم از آزمون امروزتون لذت برده باشین.

اهمیت مباحث ریاضیات پایه در کنکور:

این آزمون با یه موضوعاتی کنارتون هستیم از جنس ریاضی، با طعم فیزیک و بوی شیمی!!

تعجب نکنید، فصول این آزمون مبنا و پایه ریاضیاته که هر چند به صورت مستقیم خیلی سوال خیز نیست اما در واقع پیش نیاز همه بخش‌های ریاضی و لازمهٔ حل سوالات و مسائل فیزیک و شیمیه.

این بخش‌ها همون کلید گم شده دانش‌آموزای ما برای موفقیت در حل سوالات ترکیبی ریاضی، فیزیک و شیمیه که با تسلط رو اینا می‌تونین خیالتون بابت حل مسائل معادله، نامعادله و ... کاملاً راحت باشه.

پیش‌نیازهای مطالعه این بخش کدام مباحث هستند؟

برای یادگیری بهتر این بخش بهتره فصل‌های ۲ و ۴ و ۵ و۷ از کتاب نهم رو دوره کنید.

این بخش‌ها در کدام قسمت‌ها کاربرد دارد؟

سوالات تابع، لگاریتم و نمایی، مشتق و کاربردش و ... حتی احتمال، همه و همه می‌تونن با این بخش‌ها ترکیب بشن. دیگه نمی‌دونیم با چه زبونی بهتون اهمیت تحلیل و بررسی این بخش آزمون رو نشون بدیم.

کنکور سراسری	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ نوبت اول	۱۴۰۲ نوبت دوم	۱۴۰۳ نوبت اول	۱۴۰۳ نوبت دوم
تعداد سوال	۲	۴	۴	۳	۳	۳
مباحث مطرح شده در سوال	معادله درجه ۲ (۲ سوال)	سهمی نامعادله معادله درجه ۲ معادلات رادیکالی و گویا	سهمی نامعادله معادله درجه ۲ معادلات رادیکالی	معادلات گویا (نسبت طلایی) معادله درجه ۲ سهمی	سهمی (۲ سوال) نامعادله و تعیین علامت	نامعادله و تعیین علامت سهمی (۲سوال)

حالا برین تحلیل آزمون رو شروع کنین که به‌نظرم **تحلیل** آزمون و مشخص شدن ایرادها از خود آزمون دادن مهم‌تره. آرزومند آرزوهایتان...

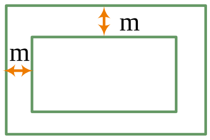
حسین شفیع‌زاده - رتبهٔ ۶ کنکور ۶۷ و مسئول درس ریاضی آزمون ماز

۱- درون یک سالن مستطیل شکل بزرگ، فرشی به شکل مستطیل و با ابعاد ۱۲ و ۸ متر وجود دارد. اگر فاصلهٔ هر طرف فرش از دیوار سالن برابر مقدار ثابت m باشد و مجموع مساحت قسمت‌های فرش نشده برابر ۱۵۶ مترمربع باشد، m کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

مساحت فرش $۹۶ = ۸ \times ۱۲$ مترمربع و مجموع مساحت قسمت‌های فرش نشده برابر ۱۵۶ مترمربع است، پس مساحت سالن برابر $۲۵۲ = ۹۶ + ۱۵۶$ مترمربع است. فاصلهٔ هر طرف فرش از دیوار سالن برابر m است، پس طول و عرض سالن به ترتیب $۱۲+۲m$ و $۸+۲m$ است، بنابراین داریم:



$$(۱۲+۲m)(۸+۲m)=۲۵۲$$

$$۹۶+۲۴m+۱۶m+۴m^۲=۲۵۲ \Rightarrow ۴m^۲+۴۰m-۱۵۶=۰$$

$$\Rightarrow m^۲+۱۰m-۳۹=۰ \Rightarrow (m-۳)(m+۱۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=-۱۳ \text{ غ ق ق} \\ m=۳ \checkmark \end{cases}$$

ریشه‌ها رو چطور پیدا کنیم؟ با تجزیه ...

تجزیه به کمک فاکتورگیری	تجزیه به کمک اتحاد مزدوج	تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک
$mx^۲+nx=x(mx+n)$	$x^۲-m^۲=(x-m)(x+m)$	$x^۲+mx+n=(x+\bigcirc)(x+\square)$
$۲x^۲-۴x=x(۲x-۴)$	$x^۲-۱۶=(x-۴)(x+۴)$	$x^۲-x-۶=(x-۳)(x+۲)$

گروه آموزشی ماز

۲- اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادله درجه دوم $x^۲-(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})x+\sqrt{۶}=۰$ باشند و $x_۲>x_۱$ باشد، حاصل $x_۱^۴+x_۲^۲$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳ آزمون وی ای پی (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

$$x^۲-(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})x+\sqrt{۶}=۰$$

توجه شود که $\sqrt{۶}$ حاصل‌ضرب دو عدد $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ است، پس طبق اتحاد جمله مشترک خواهیم داشت:

$$(x-\sqrt{۲})(x-\sqrt{۳})=۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱=\sqrt{۲} \\ x_۲=\sqrt{۳} \end{cases}$$

$$x_۱^۴+x_۲^۲=(\sqrt{۲})^۴+(\sqrt{۳})^۲=۴+۳=۷$$

گروه آموزشی ماز

۳- هرگاه α و β ریشه‌های معادله $x^۲-(۲k+۲)x-۲=۰$ باشند و بین ریشه‌ها، رابطهٔ $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=-۴$ برقرار باشد، مقدار k کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) -۳

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

$$x^۲-۲(k+۱)x-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=۲(k+۱) \\ P=\alpha\beta=-۲ \end{cases}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=-۴ \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{S^۲-۲P}{P}=-۴ \Rightarrow \frac{۴(k+۱)^۲+۴}{-۲}=-۴$$

$$(k+۱)^۲=۱ \Rightarrow \begin{cases} k=۰ \\ k=-۲ \end{cases}$$

هر آنچه باید در مورد روابط بین ریشه‌ها بدانید!

رابطه	حاصل برحسب S و P
$\alpha^۲+\beta^۲$	$\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=S^۲-۲P$
$\alpha^۳+\beta^۳$	$\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^۳-۳PS$
$\alpha^۴+\beta^۴$	$\alpha^۴+\beta^۴=(\alpha^۲+\beta^۲)^۲-۲(\alpha\beta)^۲=(S^۲-۲P)^۲-۲P^۲$
$\alpha^۶+\beta^۶$	$\alpha^۶+\beta^۶=(\alpha^۲+\beta^۲)^۳-۳(\alpha\beta)^۲(\alpha^۲+\beta^۲)=(S^۲-۲P)^۳-۳P^۲(S^۲-۲P)$
$\frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲}$	$\frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲}=\frac{\beta^۲+\alpha^۲}{\alpha^۲\beta^۲}=\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}{(\alpha\beta)^۲}=\frac{S^۲-۲P}{P^۲}$
$\frac{۱}{\alpha^۳}+\frac{۱}{\beta^۳}$	$\frac{۱}{\alpha^۳}+\frac{۱}{\beta^۳}=\frac{\beta^۳+\alpha^۳}{\alpha^۳\beta^۳}=\frac{(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^۳}=\frac{S^۳-۳PS}{P^۳}$
$\frac{۱}{\alpha^۴}+\frac{۱}{\beta^۴}$	$\frac{۱}{\alpha^۴}+\frac{۱}{\beta^۴}=\frac{\beta^۴+\alpha^۴}{\alpha^۴\beta^۴}=\frac{(\alpha^۲+\beta^۲)^۲-۲(\alpha\beta)^۲}{(\alpha\beta)^۴}=\frac{(S^۲-۲P)^۲-۲P^۲}{P^۴}$
$\|\alpha-\beta\|$	$\|\alpha-\beta\|=\frac{\sqrt{\Delta}}{\|a\|}$
$\|\alpha^۲-\beta^۲\|$	$\|\alpha^۲-\beta^۲\|=\|(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\|=\left\|\frac{\sqrt{\Delta}}{\|a\|}\times S\right\|$
$\|\alpha^۳-\beta^۳\|$	$\|\alpha^۳-\beta^۳\|=\|(\alpha-\beta)(\alpha^۲+\beta^۲+\alpha\beta)\|=\left\|\frac{\sqrt{\Delta}}{\|a\|}(S^۲-P)\right\|$
$\|\alpha^۴-\beta^۴\|$	$\|\alpha^۴-\beta^۴\|=\|(\alpha^۲-\beta^۲)(\alpha^۲+\beta^۲)\|=\left\|\frac{\sqrt{\Delta}}{\|a\|}(S)(S^۲-۲P)\right\|$
$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{S+۲\sqrt{P}}\quad (\alpha,\beta>۰)$
$\|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\|$	$\|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\|=\sqrt{\alpha+\beta-۲\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{S-۲\sqrt{P}}\quad (\alpha,\beta>۰)$
$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{S}{\sqrt{P}}$

گروه‌آموزشی ماز

۴- در یک مستطیل طول سه برابر عرض مستطیل است. مقدار ثابتی به عرض اضافه می‌کنیم و به همان مقدار از طول مستطیل کم می‌کنیم به‌طوری که مستطیل حاصل به مستطیل طلایی تبدیل شود. مقدار ثابت چه عددی است؟

۱) $۵+۲\sqrt{۵}$

۲) $\frac{۵+۲\sqrt{۵}}{۲}$

۳) $۵-۲\sqrt{۵}$

۴) $\frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۴}$

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

در ابتدا برای راحتی کار اضلاع مستطیل را ۱ و ۳ فرض می‌کنیم. اگر مقدار ثابت را k فرض کنیم آن‌گاه قرار است مستطیل با اضلاع $۳-k$ و $۱+k$ طلایی باشد. یعنی $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}=\frac{۳-k}{۱+k}$.

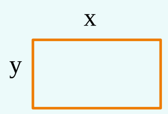
۱

$$۶-۲k=۱+\sqrt{۵}+k+k\sqrt{۵}\Rightarrow ۵-\sqrt{۵}=۳k+k\sqrt{۵}$$

$$k=\frac{۵-\sqrt{۵}}{۳+\sqrt{۵}}\times\frac{۳-\sqrt{۵}}{۳-\sqrt{۵}}\Rightarrow k=\frac{۱۵+۵-۸\sqrt{۵}}{۴}=\frac{۲۰-۸\sqrt{۵}}{۴}=۵-۲\sqrt{۵}$$

مستطیل داریم از نوع طلایی!

اگر در یک مستطیل با طول x و عرض y، رابطه زیر برقرار باشد، در این صورت به آن مستطیل، **مستطیل طلایی** و به نسبت $\frac{x}{y}$، **نسبت طلایی** می‌گوییم.



$$\boxed{\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x}}$$

حال اگر در معادله فوق $y=۱$ فرض کنیم، داریم:

$$x=\frac{x+۱}{x}\Rightarrow x^۲-x-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}x_۱=\dfrac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\\[2mm] x_۲=\dfrac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

توجه داشته باشید که عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$، به **عدد طلایی** معروف است و مقدار تقریبی آن برابر $۱/۶۱۸$ می‌باشد، بنابراین می‌توان گفت که در یک مستطیل طلایی، نسبت طول به عرض آن برابر $\frac{x}{y}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ است.

گروه آموزشی ماز

۵- اگر معادلهٔ $۴x^۲+۶x+k-۵=۰$ حداکثر یک جواب داشته باشد، کوچک‌ترین مقدار صحیح k کدام است؟

۱) ۷   ۲) ۸   ۳) -۷ ۴) -۸

پاسخ: گزینه ۲ **ازمون وی ای پی**   (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

شرط این‌که معادله دارای حداکثر یک جواب باشد این است که $\Delta\le ۰$ باشد، پس خواهیم داشت:

$$۴x^۲+۶x+k-۵=۰$$

$$\Delta\le ۰\Rightarrow ۳۶-۴(۴)(k-۵)\le ۰\Rightarrow ۳۶-۱۶k+۸۰\le ۰\Rightarrow ۱۶k\ge ۱۱۶\Rightarrow k\ge\frac{۱۱۶}{۱۶}\Rightarrow k\ge\frac{۲۹}{۴}$$

پس کوچک‌ترین مقدار صحیح k برابر ۸ است.

ریشه‌ها

$ax^۲+bx+c=۰\ ;\ (a\ne ۰)$			
$\Delta=b^۲-۴ac$	$\Delta>۰$	$\Delta=۰$	$\Delta<۰$
تعداد ریشه‌ها	معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.	معادله یک ریشه مضاعف دارد.	معادله ریشه حقیقی ندارد.
ریشه‌ها	$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$	$x=-\frac{b}{۲a}$	-

گروه آموزشی ماز

۶- به ازای چه مقادیری از m معادلهٔ $x^۴-(m+۲)x^۲-(m+۴)=۰$ فاقد جواب حقیقی است؟

۱) $-۴<m<-۲$ ۲) $m<-۴$ ۳) $m>۲$ ۴) به ازای هیچ مقدار m

پاسخ: گزینه ۲   (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

با فرض $x^۲=t$ خواهیم داشت:

$$x^۴-(m+۲)x^۲-(m+۴)=۰\Rightarrow t^۲-(m+۲)t-(m+۴)=۰$$

$$\Delta=(m+۲)^۲+۴(m+۴)=m^۲+۴m+۴+۴m+۱۶=m^۲+۸m+۲۰=m^۲+۸m+۱۶+۴=(m+۴)^۲+۴\Rightarrow$$ همواره مثبت است Δ

پس در معادلهٔ همواره $\Delta>۰$ است، یعنی معادلهٔ همواره دو جواب حقیقی متمایز دارد. حال اگر بخواهیم معادلهٔ اصلی فاقد ریشهٔ حقیقی باشد باید هر دو ریشهٔ معادلهٔ جدید، منفی باشند (زیرا به ازای مقادیر منفی t، برای معادلهٔ $x^۲=t$ جوابی به دست نمی‌آید.)

شرط وجود دو ریشهٔ حقیقی منفی برای معادلهٔ جدید این است که:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار} \\ P > 0 \Rightarrow -(m+4) > 0 \Rightarrow m+4 < 0 \Rightarrow m < -4 \\ S < 0 \Rightarrow m+2 < 0 \Rightarrow m < -2 \end{cases}$$

اشتراک مقادیر به دست آمده برای m به صورت $m < -4$ است.

معادلات به فرم $ax^4 + bx^2 + c = 0$:

برای حل معادلات به فرم $ax^4 + bx^2 + c = 0$، از تغییر متغیر $x^2 = t$ استفاده کرده و معادله را به شکل $at^2 + bt + c = 0$ می‌نویسیم و آن را حل می‌کنیم، سپس tهای به دست آمده را برابر x^2 قرار داده و مقادیر x را محاسبه می‌کنیم. توجه داشته باشید که چون $x^2 = t \geq 0$ است، بنابراین tهای منفی غیرقابل قبول هستند.

$ax^4 + bx^2 + c = 0$	$at^2 + bt + c = 0$	شرط
۴ ریشه حقیقی متمایز	دو ریشه متمایز مثبت	$\Delta > 0, S > 0, P > 0$
۳ ریشه حقیقی متمایز	یک ریشه صفر و یک ریشه مثبت	$S > 0, P = 0$
۲ ریشه حقیقی متمایز	دو ریشه مختلف‌العلامت	$P < 0$
	یک ریشه مضاعف مثبت	$\Delta = 0, S > 0$
فقط یک ریشه حقیقی	یک ریشه صفر و یک ریشه منفی	$S < 0, P = 0$
	یک ریشه مضاعف صفر	$b = c = 0$
فاقد ریشه حقیقی	فاقد ریشه حقیقی	$\Delta < 0$
	دو ریشه ساده منفی	$\Delta > 0, S < 0, P > 0$
	یک ریشه مضاعف منفی	$\Delta = 0, S < 0$

گروه آموزشی ماز

۷- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x-2}{x} < \frac{x-1}{x+1}$ به صورت (a,b) است. حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) $\frac{-3}{2}$ ۴) $\frac{-5}{2}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

$$\frac{x-1}{x+1} < \frac{x-2}{x} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} - \frac{x-2}{x} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x - (x^2 - x - 2)}{x(x+1)} < 0 \Rightarrow \frac{2}{x(x+1)} < 0$$

چون صورت کسر مثبت است، پس باید مخرج آن منفی باشد، یعنی داریم: $x(x+1) < 0$

x		-1		0	
$x(x+1)$	+	۰	−	۰	+

$(-1, 0) =$ مجموعه جواب

بنابراین $a = -1$ و $b = 0$ است و در نتیجه $a - b = -1$ است.

گروه آموزشی ماز

۸- چند عدد صحیح در نامعادلهٔ $x^2 \leq 8|x| - 12$ صدق می‌کند؟

۱) ۱۰ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

$$x^2 \leq 8|x| - 12 \Rightarrow |x|^2 - 8|x| + 12 \leq 0 \Rightarrow (|x|-2)(|x|-6) \leq 0 \Rightarrow 2 \leq |x| \leq 6 \Rightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 6 \\ -6 \leq x \leq -2 \end{cases}$$

بنابراین اعداد صحیحی که در نامعادله صدق می‌کنند، عبارتند از: $-2, -3, -4, -5, -6$ و $2, 3, 4, 5, 6$ که تعداد آن‌ها برابر ۱۰ است.

معادلات به فرم $ax^2 + b|x| + c = 0$:

برای حل معادلات به فرم $ax^2 + b|x| + c = 0$، از تغییر متغیر $|x| = t$ استفاده کرده و معادله را به شکل $at^2 + bt + c = 0$ می‌نویسیم و آن را حل می‌کنیم، سپس tهای به دست آمده را برابر $|x|$ قرار داده و مقادیر x را محاسبه می‌کنیم. توجه داشته باشید که چون $|x| = t \geq 0$ است، بنابراین tهای منفی غیرقابل قبول هستند.

گروه آموزشی ماز

۹- جواب معادلهٔ $\sqrt{\frac{۸}{۲x-۱}+۲۰}=\frac{۱}{۲x-۱}$ برابر $\frac{a}{۲۰}$ است. a کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۳ ۳) ۹ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

$$\sqrt{\frac{۸}{۲x-۱}+۲۰}=\frac{۱}{۲x-۱}$$

فرض : $\frac{۱}{۲x-۱}=t \Rightarrow \sqrt{۸t+۲۰}=t$

بدیهی است که باید $t\geq ۰$ باشد، بنابراین با شرط $t\geq ۰$ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۸t+۲۰=t^۲ \Rightarrow t^۲-۸t-۲۰=۰ \Rightarrow (t-۱۰)(t+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۱۰ \\ t=-۲ \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$t=۱۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲x-۱}=۱۰ \Rightarrow ۲x-۱=\frac{۱}{۱۰} \Rightarrow x=\frac{۱۱}{۲۰}$$
$$\Rightarrow a=۱۱$$

معادله‌های رادیکالی (گنگ)

به معادله‌هایی که در آن‌ها مجهول (متغیر) زیر رادیکال قرار داشته باشد، معادله‌های رادیکالی (گنگ) می‌گوییم.

به عنوان مثال:

معادله‌های زیر چند نمونه از معادلات رادیکالی هستند.

$$\frac{۵}{\sqrt{x+۲}}=۲-\frac{۱}{\sqrt{x-۲}} \qquad \sqrt{x+۳}+\sqrt{۳x+۱}=۴ \qquad \sqrt{x+۲}=x-۴$$

برای حل یک معادله رادیکالی باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱) یکی از رادیکال‌ها را در یک طرف معادله نگه می‌داریم و مابقی جمله‌ها را به طرف دیگر معادله منتقل می‌کنیم.

۲) طرفین معادله را به توان مناسب می‌رسانیم. (معمولاً طرفین را به توان ۲ می‌رسونیم)

توجه:

توجه داشته باشید که اگر با به توان رساندن طرفین معادله، مجدداً در معادله عبارت رادیکالی حضور داشته باشد سعی می‌کنیم که با تکرار مراحل ۱ و ۲، کل معادله را از حالت رادیکالی خارج کنیم.

۳) معادله به دست آمده را تا حد امکان ساده کرده و آن را حل می‌کنیم و جواب (یا جواب‌های) معادله را به دست می‌آوریم.

۴) جواب(های) به دست آمده را در معادله اصلی آزمایش می‌کنیم و جواب‌هایی را قبول می‌کنیم که اولاً در دامنه تعریف متغیر معادله قرار داشته باشند و ثانیاً در معادله اصلی صدق کنند.

گروه آموزشی ماز

۱۰- اگر یکی از ریشه‌های معادله $۲x-k=\sqrt{۱۱x-۲۴}$ برابر k باشد، ریشه دیگر کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱۳}{۴}$

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

$$x=k \Rightarrow ۲k-k=\sqrt{۱۱k-۲۴} \Rightarrow k^۲-۱۱k+۲۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} k=۳ \\ k=۸ \end{cases}$$

$$k=۳:(۲x-۳)^۲=۱۱x-۲۴ \Rightarrow ۴x^۲+۹-۱۲x=۱۱x-۲۴$$

$$۴x^۲-۲۳x+۳۳=۰$$

$$(x-۳)(۴x-۱۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ x=\frac{۱۱}{۴} \end{cases}$$

$$k=۸:(۲x-۸)^۲=۱۱x-۲۴ \Rightarrow ۴x^۲-۳۲x+۶۴=۱۱x-۲۴$$

$$۴x^۲ - ۴۳x + ۸۸ = ۰$$

$$(x-۸)(۴x-۱۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۸ \\ x = \frac{۱۱}{۴} \end{cases}$$

البته یکی از معادلات را هم حل می‌کردیم، کافی بود.

گروه آموزشی ماز

۱۱- یک مخزن آب توسط دو شیر A و B پر می‌شود. زمان پر شدن مخزن توسط شیر B، سه برابر زمان شیر A است. اگر هر دو شیر باز باشند، مخزن در ۹ ساعت پر می‌شود. اختلاف زمان پر شدن مخزن توسط هر یک از شیرها به تنهایی کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

پاسخ: گزینه ۳ ازهرون وی ای پی (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

زمان پر شدن مخزن توسط شیر B، سه برابر شیر A است، پس داریم:

$\frac{۱}{t} =$ میزان پر شدن در یک ساعت توسط شیر A $\Leftarrow$ $t =$ زمان پر شدن توسط شیر A

$\frac{۱}{۳t} =$ میزان پر شدن در یک ساعت توسط شیر B $\Leftarrow$ $۳t =$ زمان پر شدن توسط شیر B

$\frac{۱}{۹} =$ میزان پر شدن در یک ساعت توسط هر دو شیر $\Leftarrow$ $۹ =$ زمان پر شدن توسط هر دو شیر A و B

$$\Rightarrow \frac{۱}{t}+\frac{۱}{۳t}=\frac{۱}{۹} \Rightarrow \frac{۴}{۳t}=\frac{۱}{۹} \Rightarrow ۳t=۳۶ \Rightarrow t=۱۲$$

$۳t - t = ۲t = ۲۴ =$ اختلاف زمان پر شدن مخزن توسط شیرهای A و B

مسائل مربوط به موازی کاری

اگر شخص A کاری را به تنهایی در x روز (ساعت) و شخص B همان کار را به تنهایی در y روز (ساعت) انجام دهند، در این صورت:

- شخص A به تنهایی در هر روز (ساعت)، $\frac{۱}{x}$ از کل کار را انجام می‌دهد.
- شخص B به تنهایی در هر روز (ساعت)، $\frac{۱}{y}$ از کل کار را انجام می‌دهد.
- اگر شخص A و شخص B هر دو با هم کار کنند در هر روز (ساعت)، $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$ از کل کار را انجام می‌دهند.

گروه آموزشی ماز

۱۲- اگر حاصل عبارت $P(x)=\frac{mx^۲+(۲m+۳)x+۳}{x^۲+x+۱}$، به ازای هر مقدار حقیقی x، همواره بزرگ‌تر از ۲ باشد، محدودهٔ m کدام است؟

۱) $m<۲$ ۲) $m>۲$ ۳) به ازای هر مقدار m ۴) به ازای هیچ مقدار m

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

طبق فرض مسئله همواره داریم:

$$\frac{mx^۲+(۲m+۳)x+۳}{x^۲+x+۱}>۲$$

چون مخرج کسر همواره مثبت است (زیرا $\Delta<۰$ و $a>۰$ است) پس مجاز هستیم طرفین نامعادله را در $(x^۲+x+۱)$ ضرب کنیم که در این صورت خواهیم داشت:

$$mx^۲+(۲m+۳)x+۳>۲x^۲+۲x+۲ \Rightarrow (m-۲)x^۲+(۲m+۱)x+۱>۰$$

چون نامساوی اخیر به ازای هر عدد حقیقی x برقرار است، پس باید $\Delta<۰$ و $a>۰$ باشد.

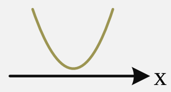
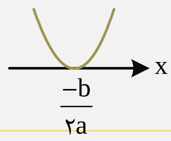
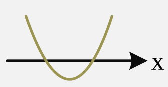
$$\begin{cases} a>۰ \Rightarrow m-۲>۰ \Rightarrow m>۲ \\ \Delta<۰ \Rightarrow (۲m+۱)^۲-۴(m-۲)<۰ \Rightarrow ۴m^۲+۹<۰ \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = \varnothing \end{cases}$$

زیرا عبارت $۴m^۲+۹$ همواره مثبت است، پس به ازای هیچ مقدار m امکان ندارد، حاصل عبارت $P(x)$ بزرگ‌تر از ۲ باشد.

صفرهای تابع درجه دوم:

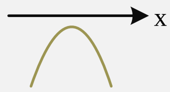
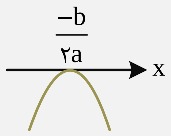
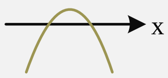
به نقاط برخورد نمودار تابع درجه دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ با محور xها، صفرهای تابع درجه دوم می‌گوییم که در واقع همان ریشه‌های معادله $f(x)=۰$ هستند، به عبارت دیگر در این نقاط، مقدار تابع برابر صفر است.

حال برای اینکه وضعیت نمودار سهمی $y=ax^۲+bx+c$ نسبت به محور xها را بررسی کنیم باید به سراغ دلتای معادله سهمی و همچنین جهت دهانه سهمی برویم. (جدول‌ها رو دریاب ...)

$a>۰$		
$\Delta<۰$	$\Delta=۰$	$\Delta>۰$
		
تابع درجه دوم محور xها را قطع نمی‌کند. تابع درجه دوم همواره بالای محور xها است. تابع درجه دوم همواره مثبت است. معادله درجه دوم ریشه حقیقی ندارد.	تابع درجه دوم بالای محور xها و بر آن مماس است. معادله درجه دوم یک ریشه مضاعف $x=-\frac{b}{۲a}$ دارد.	تابع درجه دوم محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند. معادله درجه دوم دو ریشه ساده دارد.

توجه:

با توجه به جدول فوق می‌توان نتیجه گرفت شرط اینکه عبارت درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$ همواره مثبت باشد، این است که $a>۰$ و $\Delta<۰$ باشد.

$a<۰$		
$\Delta<۰$	$\Delta=۰$	$\Delta>۰$
		
تابع درجه دوم محور xها را قطع نمی‌کند. تابع درجه دوم همواره پایین محور xها است. تابع درجه دوم همواره منفی است. معادله درجه دوم ریشه حقیقی ندارد.	تابع درجه دوم پایین محور xها و بر آن مماس است. معادله درجه دوم یک ریشه مضاعف $x=-\frac{b}{۲a}$ دارد.	تابع درجه دوم محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند. معادله درجه دوم دو ریشه ساده دارد.

توجه:

با توجه به جدول فوق می‌توان نتیجه گرفت شرط اینکه عبارت درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$ همواره منفی باشد، این است که $a<۰$ و $\Delta<۰$ باشد.

گروه آموزشی ماز

۱۳- اگر $x=-۲$ ریشهٔ معادلهٔ $\frac{x^۲-۱۴}{۲a}=\frac{۱}{a}+\frac{x}{x+a}$ باشد، a کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) -۲
۴) -۳

کنکور ۱۴۰۴

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

چون $x=-۲$ ریشهٔ معادلهٔ $\frac{x^۲-۱۴}{۲a}=\frac{۱}{a}+\frac{x}{x+a}$ است، پس باید در معادله صدق کند، یعنی داریم:

$$\frac{-۲}{-۲+a}+\frac{۱}{a}=\frac{۴-۱۴}{۲a}\Rightarrow\frac{-۲}{-۲+a}=\frac{-۶}{a}\Rightarrow -۲a=۱۲-۶a\Rightarrow ۴a=۱۲\Rightarrow a=۳$$

معادلات گویا رو چطور حل کنیم؟

به معادله‌های شامل عبارت‌های کسری که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای باشد، معادله‌های گویا می‌گوییم.

به عنوان مثال:

معادله‌های زیر نمونه‌ای از معادلات گویا هستند.

$$\frac{x^۲+۵}{x^۲+۱}+\frac{۵}{x^۲+۲}=۳ \qquad \frac{۳}{x+۲}+\frac{۲}{x}=\frac{۴x-۴}{x^۲-۴}$$

برای حل معادله‌های شامل عبارت‌های گویا مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

- ابتدا مخرج هر یک از کسرها را (در صورت لزوم) به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم. (چندجمله‌ای)
- طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج کسرها ضرب می‌کنیم تا معادله از حالت کسری خارج شود.
- عبارت جبری به دست آمده را تا حد امکان ساده کرده و معادله حاصل شده (معمولاً درجه ۲) را حل می‌کنیم.
- در نهایت جواب‌های به دست آمده را در معادله اصلی امتحان می‌کنیم.

توجه:

توجه کنید که جواب‌های به دست آمده زمانی قابل قبول خواهند بود که اولاً مخرج هیچ‌یک از کسرها را صفر نکنند و ثانیاً این جواب‌ها با شرایط مسئله در محیط پیرامونی مطابقت داشته باشند. *(قسمت دوم رو متوجه نشدم! یعنی اینکه مثلاً اگر قراره با حل یه معادله طول یک شکل رو محاسبه کنیم، اندازه این طول رو منفی به دست نیاریم)*

۱۴- سهمی $y=-۶(x-۱)(x-۳)$، خط $y=-۴۸$ را در نقاط A و B قطع می‌کند. مساحت مثلثی که یک رأس آن روی رأس سهمی و دو رأس دیگرش نقاط A و B باشند، کدام است؟

۱) ۱۶۲ ۲) ۱۷۶ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۵۸

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

ابتدا نقاط تلاقی خط $y=-۴۸$ را با نمودار سهمی به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y=-۶(x-۱)(x-۳) \\ y=-۴۸ \end{cases} \Rightarrow -۶(x-۱)(x-۳)=-۴۸$$

$$\Rightarrow x^۲-۴x-۵=۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=۵ \end{cases}$$

یعنی نقاط A و B دارای طول‌های ۱− و ۵ هستند، پس طول قاعدهٔ AB برابر ۶ است و ارتفاع مثلث نیز برابر ۵۴ است، زیرا طول نقطهٔ رأس سهمی $x=۲$ است و داریم:

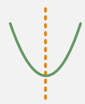
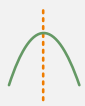
$$f(۲)=۶ \Rightarrow h=|۶-(-۴۸)|=۵۴$$

بنابراین مساحت مثلث برابر است با:

$$S_{\text{مثلث}}=\frac{۱}{۲}\times۶\times۵۴=۱۶۲$$

محور تقارن (خط تقارن) سهمی

محور تقارن سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ در واقع خط عمودی است که با محور yها موازی بوده و از رأس سهمی عبور می‌کند.

$a>۰$	$a<۰$
 محور تقارن	 محور تقارن

می‌دونیم که محور تقارن یه سهمی از رأس عبور می‌کنه، پس می‌تونیم بگیم که معادله محور تقارن یه سهمی در واقع همون طول رأس سهمی رو نشون میده که اون رو برای نمایش‌های مختلف ضابطه یه سهمی توی جدول زیر براتون آماده کردیم.

	$f(x)=ax^۲+bx+c$	$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$	$f(x)=a(x-h)^۲+k$
معادله محور تقارن	$x_S=-\frac{b}{۲a}$	$x_S=\frac{\alpha+\beta}{۲}$	$x_S=h$

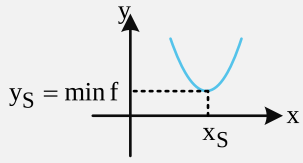
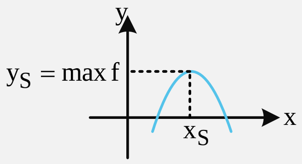
به عنوان مثال:

محور تقارن سهمی $f(x)=-x^2+2x-4$ به صورت $x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2(-1)}=1$ و محور تقارن سهمی $f(x)=-(x-3)^2+1$ به صورت $x_S=h=3$ است.

عرض رأس	$y_S=f(-\frac{b}{2a})=-\frac{\Delta}{4a}$	$y_S=f(\frac{\alpha+\beta}{2})$	$y_S=k$

توجه:

توجه کنید که منظور از بیش‌ترین مقدار (max) و یا کم‌ترین مقدار (min) یک سهمی، همان عرض رأس سهمی (y_S) است که با توجه به علامت a در تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$، داریم:

$a>0$	$a<0$
	

گروه آموزشی ماز

۱۵- **تعداد جواب(های) معادلهٔ $\sqrt{2x-\sqrt{x-2}}+\sqrt{4-x^2}=2$ چندتاست؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

اگر شرط تعریف‌شدگی عبارت را در نظر بگیریم تنها $x=2$ قابل قبول خواهد شد که در معادله هم صدق می‌کند پس تنها جواب $x=2$ خواهد بود.

گروه آموزشی ماز

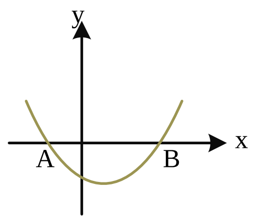
۱۶- **نمودار تابع $f(x)=2x^2-10x+m$ در شکل مقابل رسم شده است. اگر فاصلهٔ AB برابر ۹ واحد باشد، عرض نقطهٔ رأس سهمی کدام است؟**

۱) -39

۲) $-39/5$

۳) -40

۴) $-40/5$



پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

اگر طول‌های نقاط A و B را که همان ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ هستند، به ترتیب x_1 و x_2 بنامیم، خواهیم داشت:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{10}{2}=5 \xrightarrow{\text{پس از حل دستگاه}} x_2=7,\ x_1=-2$$

$$AB=9 \Rightarrow x_2-x_1=9$$

$$\Rightarrow P=x_1.x_2=-14=\frac{c}{a}=\frac{m}{2} \Rightarrow m=-28$$

پس معادلهٔ تابع به صورت $f(x)=2x^2-10x-28$ است که عرض نقطهٔ رأس سهمی برابر است با:

$$y_{min}=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{4(2)(-28)-100}{8}=-40/5$$

گروه آموزشی ماز

۱۷- ۳۲۰ کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت n درصد موجود است. اگر ۸۰ کیلوگرم نمک به آن اضافه کنیم، غلظت محلول برابر ۳۹/۲ درصد می‌شود. اگر در محلول اولیه، ۱۲۰ کیلوگرم آب را تبخیر کنیم، غلظت محلول چند درصد خواهد شد؟

۱) ۳۵/۶ ۲) ۳۶/۴ ۳) ۳۷/۶ ۴) ۳۸/۴

پاسخ: گزینه ۴ **آزمون وی ای پی** (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

چون در محلول اولیه غلظت برابر n درصد است، پس مقدار نمک موجود در آن برابر است با:

$$\frac{n}{۱۰۰}\times ۳۲۰ = ۳/۲n$$

حال با افزودن ۸۰ کیلوگرم نمک به آن خواهیم داشت:

$$\text{غلظت جدید} = \frac{۳/۲n+۸۰}{۳۲۰+۸۰}\times ۱۰۰ = \frac{۳/۲n+۸۰}{۴} = ۰/۸n+۲۰$$

طبق فرض مسئله باید غلظت جدید برابر ۳۹/۲ درصد باشد، پس داریم:

$$۰/۸n+۲۰=۳۹/۲ \Rightarrow ۰/۸n=۱۹/۲ \Rightarrow n=\frac{۱۹۲}{۸}=۲۴$$

پس محلول اولیهٔ آب نمک، محلول ۲۴ درصدی بوده و حال اگر ۱۲۰ کیلوگرم آب آن را تبخیر کنیم، غلظت جدید برابر است با:

$$\frac{۳/۲n}{۳۲۰-۱۲۰}\times ۱۰۰ = \frac{۳/۲\times ۲۴}{۲۰۰}\times ۱۰۰ = ۳۸/۴$$

مسائل مربوط به غلظت:

برای حل این مسائل بهتر است نکته‌های زیر را از درس شیمی به خاطر داشته باشیم:

غلظت یک محلول از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{غلظت یک محلول} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}}$$

اگر x گرم از یک ماده با غلظت m و y گرم از ماده دیگر با غلظت n را با هم مخلوط کنیم، غلظت مخلوط برابر است با:

$$\text{غلظت مخلوط} = \frac{xm+yn}{x+y}$$

گروه آموزشی ماز

۱۸- در کدام‌یک از سهمی‌های زیر، نقطهٔ رأس سهمی در ناحیهٔ سوم محورهای مختصات قرار دارد؟

۱) $y=۲x^۲-۴x+۱$ ۲) $y=-x^۲+۳x+۲$ ۳) $y=x^۲+۵x+۴$ ۴) $y=-۲x^۲-۶x+۳$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

برای این‌که نقطهٔ رأس سهمی در ناحیهٔ سوم محورهای مختصات قرار داشته باشد، باید طول و عرض نقطهٔ رأس، منفی باشند، مختصات رأس سهمی به صورت $S(-\frac{b}{۲a},-\frac{\Delta}{۴a})$ است، بنابراین داریم:

بررسی گزینه‌ها:

۱

$$y=۲x^۲-۴x+۱ \Rightarrow x_S=۲>۰$$

۲

$$y=-x^۲+۳x+۲ \Rightarrow x_S=\frac{۳}{۲}>۰$$

۳

$$y=x^۲+۵x+۴ \Rightarrow x_S=\frac{-۵}{۲}<۰$$

$$y_S=\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{۱۶-۲۵}{۴}=-\frac{۹}{۴}<۰ \Rightarrow S(-\frac{۵}{۲},-\frac{۹}{۴})$$

۴

$$y=-۲x^۲-۶x+۳ \Rightarrow x_S=\frac{۶}{-۴}=-\frac{۳}{۲}<۰$$

$$y_S=\frac{-۲۴-۳۶}{-۸}=\frac{۱۵}{۲}>۰$$

گروه آموزشی ماز

۱۹- اگر اعداد حقیقی و مثبت a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(3a-1)x+3b=0$ باشند، حاصل $3a-2b$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) -9

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

چون a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(3a-1)x+3b=0$ هستند، پس داریم:

$$S=a+b=\frac{3a-1}{1}\Rightarrow a+b=3a-1\Rightarrow 2a-b=1\ (1)$$

$$P=ab=\frac{3b}{1}\Rightarrow ab=3b\xrightarrow{b\neq 0}a=3\xrightarrow{(1)}6-b=1\Rightarrow b=5$$

$$\Rightarrow 3a-2b=3(3)-2(5)=-1$$

گروه آموزشی ماز

۲۰- فاصلهٔ بین رأس‌های دو سهمی $f(x)=x^2-4x+m$ و $g(x)=x^2+2x+3$ برابر $\sqrt{34}$ است. کوچک‌ترین مقدار m کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) -1 ۳) -11 ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

$f(x)=x^2-4x+m\Rightarrow$ رأس سهمی $A(2,m-4)$

$g(x)=x^2+2x+3\Rightarrow$ رأس سهمی $B(-1,2)$

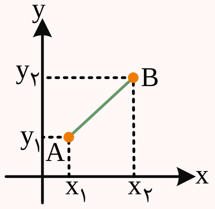
$$AB=\sqrt{34}\Rightarrow\sqrt{9+(m-6)^2}=\sqrt{34}\Rightarrow 9+(m-6)^2=34\Rightarrow(m-6)^2=25\Rightarrow m-6=\pm 5\Rightarrow\begin{cases}m=11\\m=1\end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین مقدار m برابر ۱ است.

فاصله دو نقطه

برای به دست آوردن فاصلهٔ دو نقطه به مختصات $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$



برای به خاطر سپاری بهتر اینجوری ببینید، بهتره:

$$AB=\sqrt{(\text{اختلاف طول‌ها})^2+(\text{اختلاف عرض‌ها})^2}$$

گروه آموزشی ماز